

KNOPPIX/Math で数学を

福岡大学 理学部

濱田 龍義

1 序

KNOPPIX/Math とは、「数学のおもちゃ箱」です。KNOPPIX/Math の CD/DVD を PC に入れて再起動するだけで、最新の数学ソフトウェア環境を使い始めることができます。また、収録されているソフトウェアは全てオープンソースソフトウェア*¹ですので、自由に利用・再配布ができます。そのため、福岡大学だけでなく、多くの大学、高専等の教育機関で教育、研究に使われています。KNOPPIX/Math は、数学者有志による KNOPPIX/Math Project によって開発が進められており、その公式サイト <http://www.knoppix-math.org/> は福岡大学理学部応用数学教室に設置されています。

ここでは、KNOPPIX/Math に収録されている数学ソフトウェアの中から、対話式幾何学ソフトウェア“KSEG”を使って、数学を楽しんでみましょう。KSEG は MIT*² の Ilya Baran という学生さんによって開発されたオープンソースソフトウェアです。

KSEG を使うと、図形の性質を保ったまま、変形、回転、移動を行なえます。2 点の距離や角度を計測したり、計算を行なうこともできます。また、軌跡描画機能を利用して、さまざまな曲線を描いて遊ぶことができます。

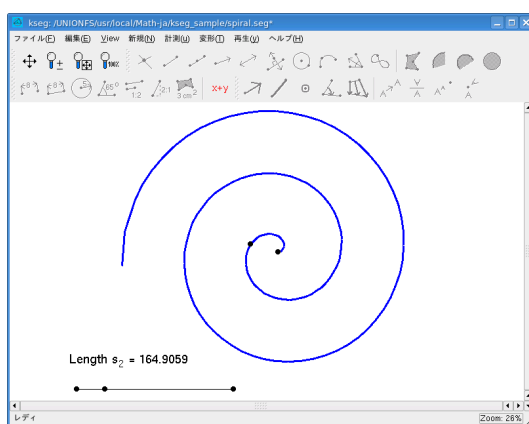


図 1 KSEG でアルキメデスのらせん

*¹ OSS, ソースコード（設計図）が公開されており、誰でも自由に利用・改良・再配布ができるソフトウェア

*² マサチューセッツ工科大学 Massachusetts Institute of Technology

2 起動方法

KSEG を起動しましょう。画面左下にある \sqrt{x} メニューの中から KSEG(KSEG) を選んで、マウスでクリックしてください。図のようなウィンドウが表示されます。

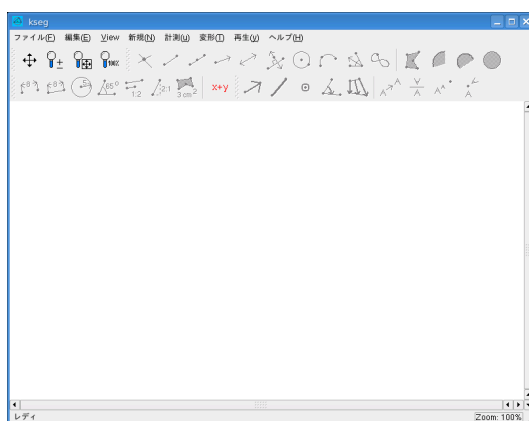


図 2 KSEG 画面

ウィンドウ上部にメニューが配置され、その下にはボタン型のアイコンがあります。ボタンの絵を見れば、おおよその見当はつくのではないのでしょうか？

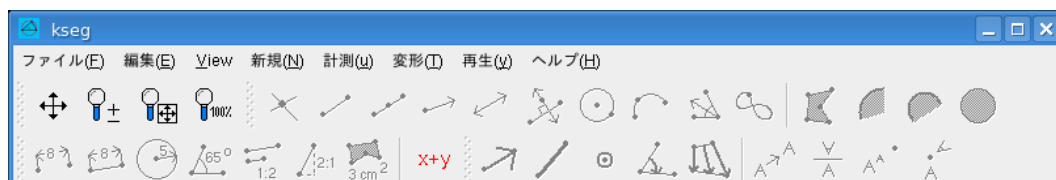


図 3 KSEG メニュー

3 KSEG で平面幾何を遊ぶ

基本的な使い方については、次の 4 つのことだけ押えておけば十分です。

1. 右クリックで点を描画
2. 左クリックで点や線、円などを選択 (矩形選択や Shift キーを用いた複数選択も可能)
3. メニューもしくはボタンで新たな図形を作成
4. 図形オブジェクトを削除したいときは選択後、Ctrl+Del キー。

例えば、線分を描くためには、両端の 2 点が必要です。従って、マウスで KSEG 画面内の 2 箇所を右クリックして、2 点をあたえます。後は、その 2 点を選択してあげてメニュー

から「新規」→「線分」を選択するか、「線分」ボタンをクリックしてください。

図 4 適当な場所で右クリック

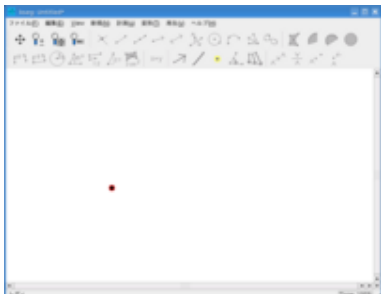


図 5 さらに別な場所で右クリック

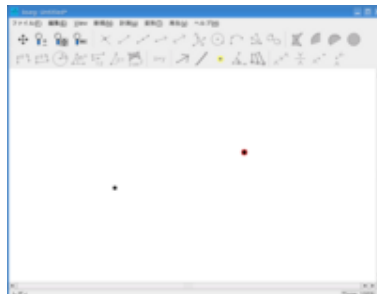


図 6 Shift キーを押しながら 2 点を選択

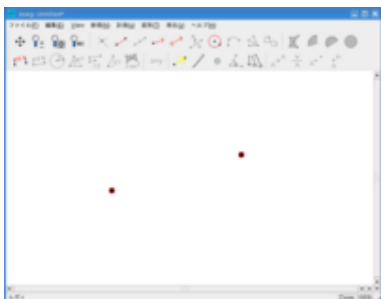
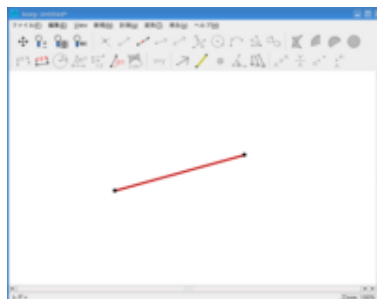


図 7 メニューから「新規」→「線分」



同様に「線分」の代わりに「直線」や「半直線」を選択することもできます。
また、KSEG で円を描くためには、次のような手順を踏みます。

図 8 適当な場所で右クリック

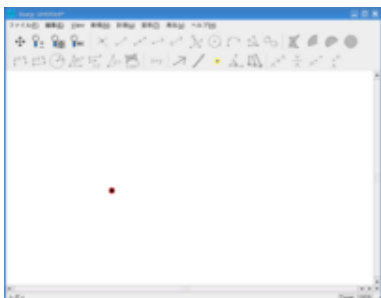


図 9 さらに別な場所で右クリック

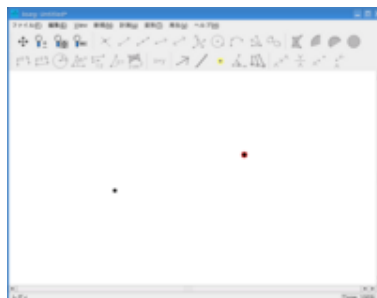


図 10 Shift キーを押しながら 2 点を選択

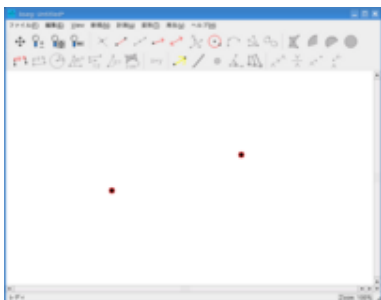
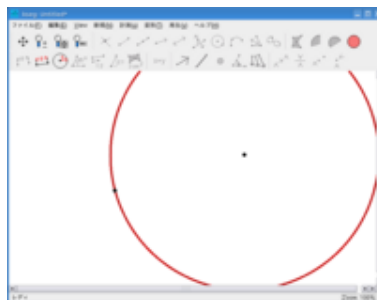


図 11 メニューから「新規」→「円」



最初に選択した点を中心にして、もう一つの点を通る円が描かれます。

まずは、様々なボタンを使って絵を描いてみてください。

3.1 三角形を描く

さて、三角形を描くときは、マウスによる矩形選択を利用すると便利です。Shift キーでの選択と使い分けて利用してください。

図 12 三角形を描くように 3 点を描く

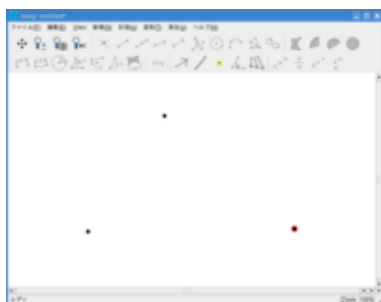


図 14 3 点を選択されました。

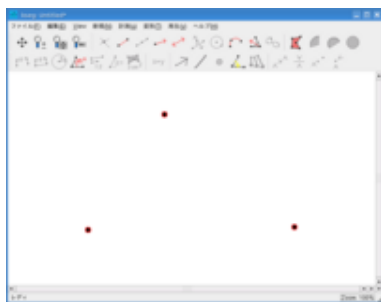


図 13 3 点を囲むようにマウスをドラッグ

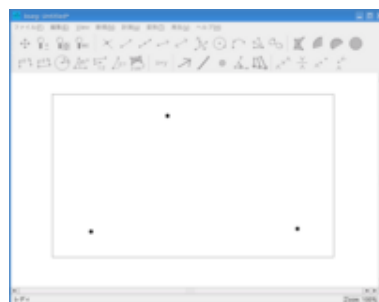
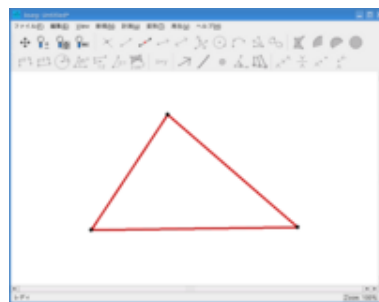


図 15 メニューから「新規」 → 「線分」



3.2 三角形の五心

三角形は内心、外心、垂心、重心、傍心をもちます。これらをあわせて五心とも呼びます。

内心 三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。この点を内心と呼ぶ。

外心 三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。この点を外心と呼ぶ。

垂心 三角形の 3 つの頂点からそれぞれの対辺に引いた垂線は 1 点で交わる。この点を垂心と呼ぶ。

重心 三角形の頂点とその対辺の中点を結ぶ 3 つの線分は 1 点で交わる。この点を重心と呼ぶ。

傍心 三角形の 1 つの内角と他の 2 つの外角の二等分線は 1 点で交わる。この点を傍心と呼ぶ。三角形に傍心は 3 つある。

KSEG では線分の長さを計ることができるので、五心の性質を確認することもできます。ここでは、重心の描き方を解説します。重心を描いたら、三角形の頂点を掴んで変形してみてください。残りの内心、外心、垂心、傍心については、自分で描き方を考えてみましょう。

図 16 三角形を描く

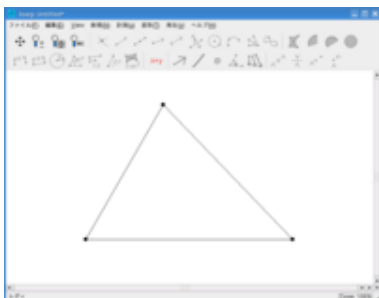


図 18 メニューから「新規」→「中点」

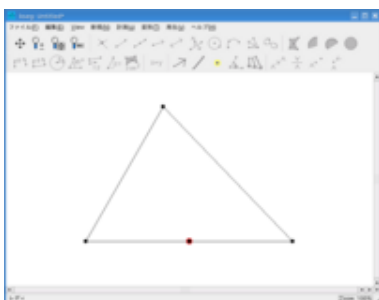


図 20 メニューから「新規」→「線分」

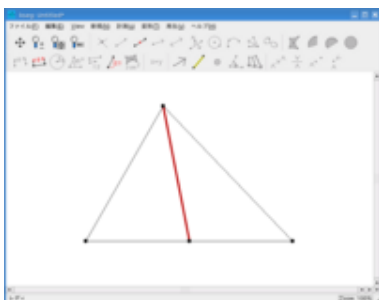


図 22 三角形の中に書かれた線分を 2 本選択

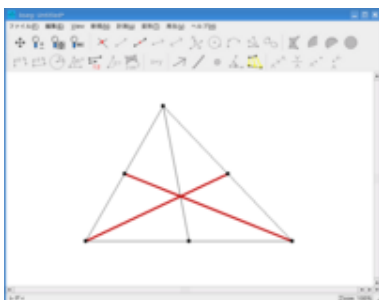


図 17 三角形の辺の一つをマウスでクリック

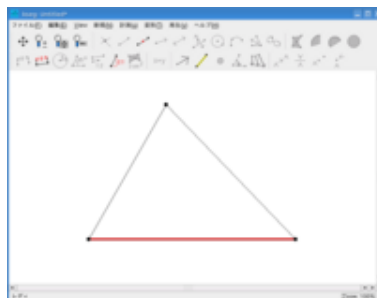


図 19 三角形の頂点と、その対辺の中点を Shift キーを押しながらクリック

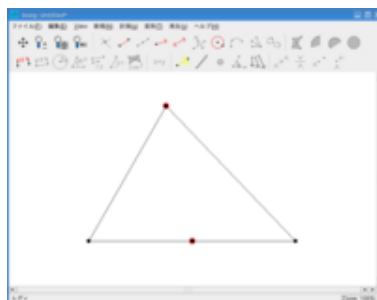


図 21 他の 2 個の三角形の頂点に対しても同様の操作

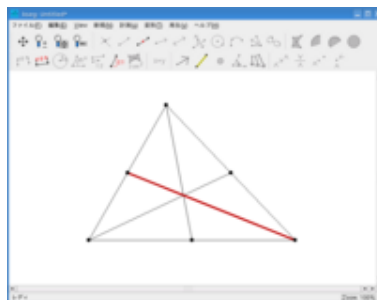
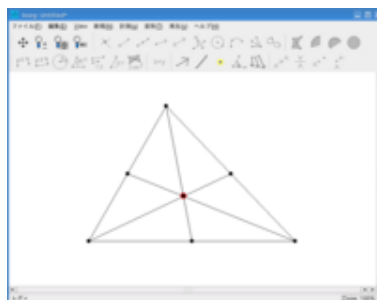


図 23 メニューから「新規」→「交点」



重心は、三角形の頂点と対辺の中点を結ぶ線分を 2 : 1 に内分することが知られています。このことを確認するために KSEG の「計測」という機能を用います。

図 24 三角形の頂点と重心を選択

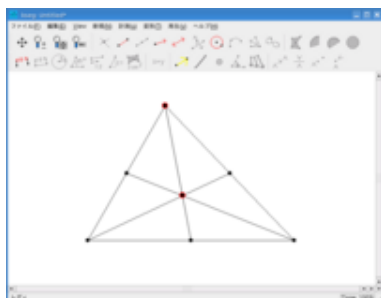


図 26 重心と対辺の中点との距離を計測

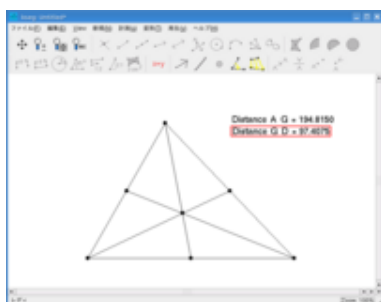


図 28 メニューから「計測」→「計算」

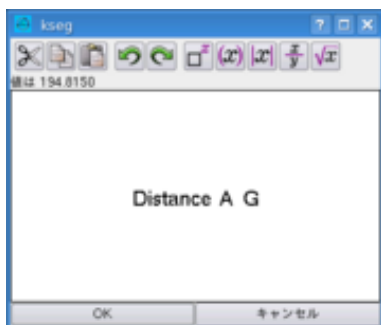


図 30 先ほどの計測値の小さい方を選択

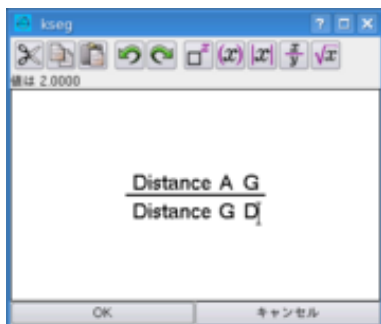


図 25 メニューから「計測」→「距離」

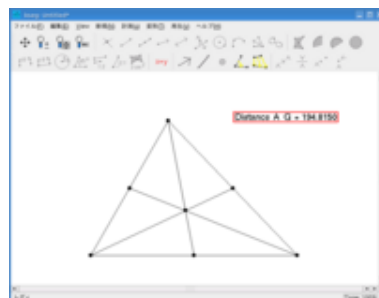


図 27 計測値の大きい方を選択

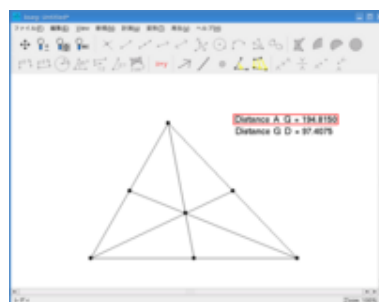


図 29 カーソルを行末に置いて、 $\frac{x}{y}$ ボタンを押す

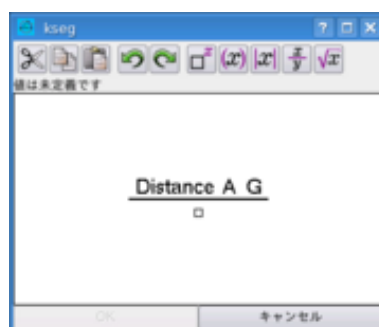
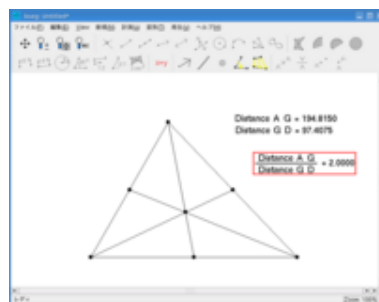


図 31 計算ウィンドウの「OK」をクリック



4 KSEG で放物線

ここでは、原点 $O = (0, 0)$ を通り、焦点が y 軸上にある放物線 (例: $y = x^2$) を描きます。放物線は、焦点と準線からの距離が等しい点の軌跡として描くことができます。

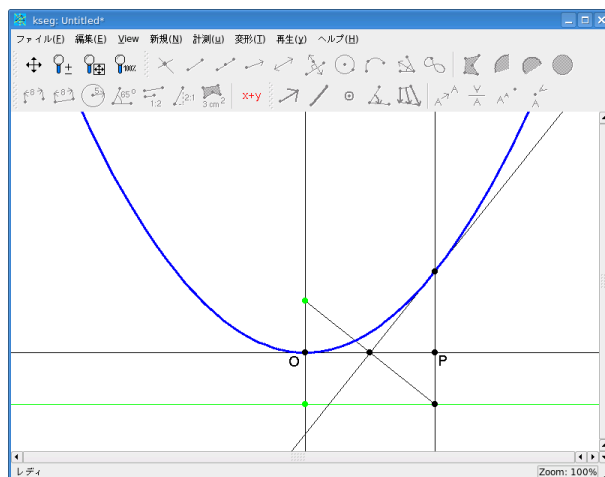


図 32 KSEG で放物線

4.1 水平線と垂直線を描く

図 33 2 点を水平な位置に描き、直線を描く

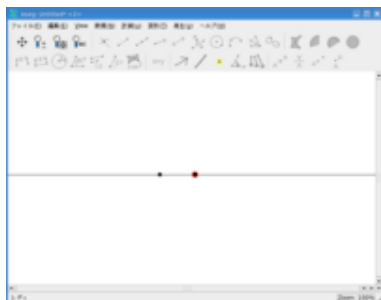
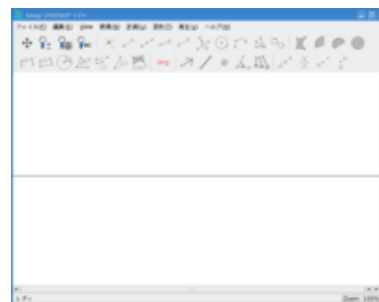


図 34 2 点を選択し、「編集」 → 「オブジェクトを隠す」



水平な直線が x 軸、垂直な直線が y 軸となります。 x 軸をマウスでドラッグすると水平なまま移動できます。 y 軸も同様に垂直なまま移動できます。

4.2 放物線を描く

水平線を x 軸、垂直線を y 軸に見立てて、交点を原点とします。放物線は図形的には“定直線 l と、 l 上にある定点 F から等しい距離にある点の軌跡”として定義されます。ここでは、原点を通る放物線を描きます。

図 35 水平な直線上の好きな場所に点を描く

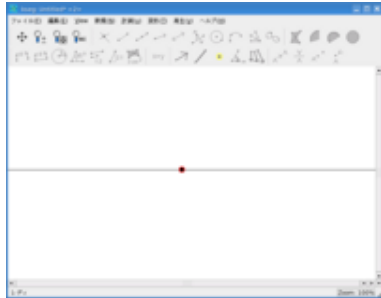


図 36 点と直線を選択し、「新規」 → 「垂線」

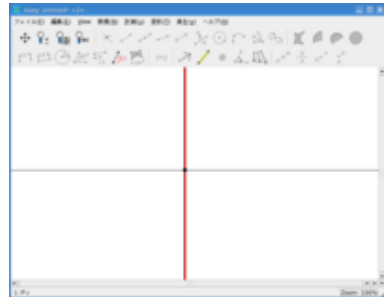


図 37 x 軸に点を描く。これが駆動点

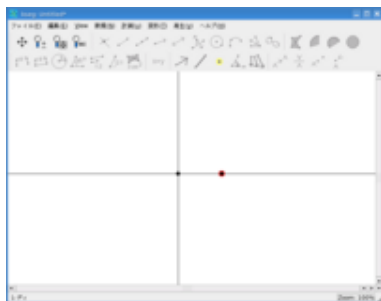


図 38 x 軸と駆動点を選択して「新規」 → 「垂線」

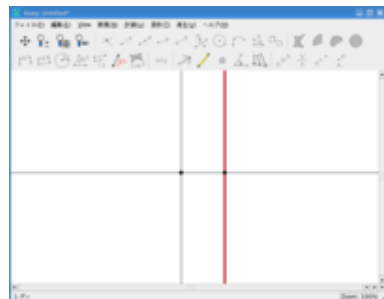


図 39 x 軸を選択して、「変形」 → 「ミラー」を選択

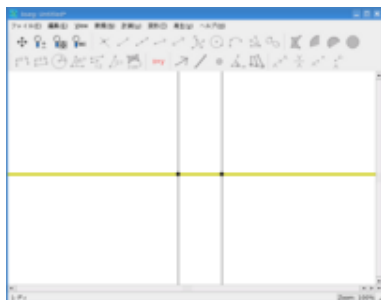


図 40 y 軸上に焦点をとる

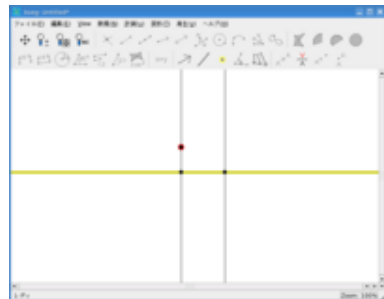


図 41 焦点を選択した状態で「変形」 → 「鏡映」

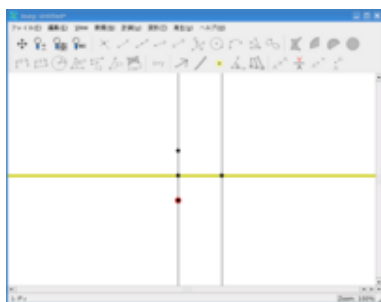


図 42 y 軸と「焦点の鏡映点」を選択して、「新規」 → 「垂線」

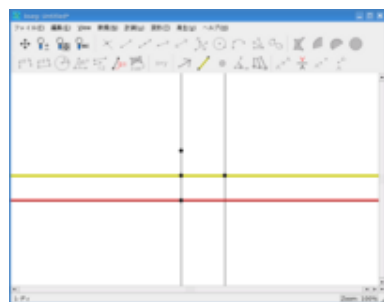


図 43 準線と駆動点を通る垂線を選択して、「新規」→「交点」

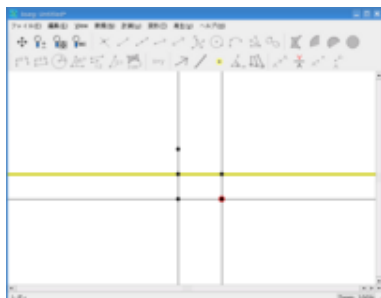


図 44 図 12 の交点と焦点を選択して、「新規」→「線分」

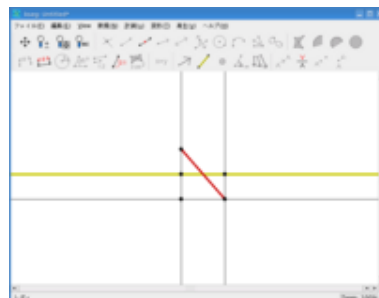


図 45 図 13 の線分に対して垂直 2 等分線 (中点 + 垂線) を作成

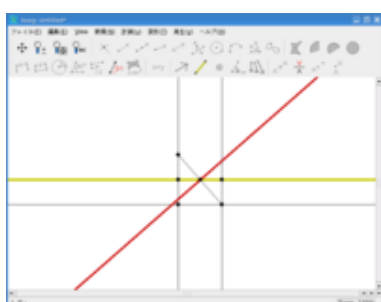


図 46 図 7 の垂線と図 14 の垂直 2 等分線との交点 (描画点) をとる

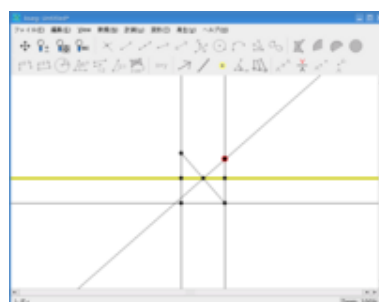


図 47 図 15 の描画点と駆動点の 2 点を選択

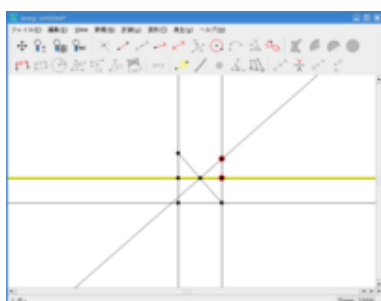
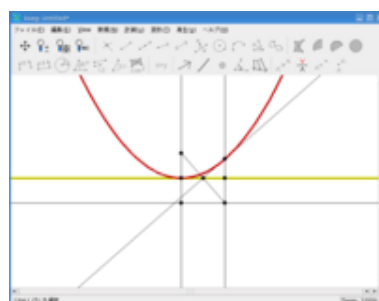


図 48 「新規」→「軌跡」



5 KSEG でアステロイド (星芒形)

KSEG でアステロイド (星芒形) を描きます。アステロイドはサイクロイドの一種です。サイクロイドとは、円がある規則にしたがって転がるときの円上の点の軌跡です。アステロイドは、特に内サイクロイドと言って円の内側を円が転がるときの軌跡となっています。

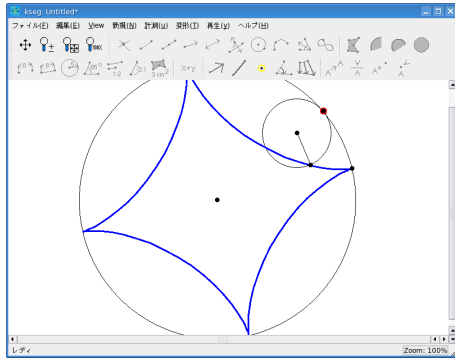


図 49 KSEG でアステロイド

図 50 2点をとり、「変形」→「ベクトルを選択」

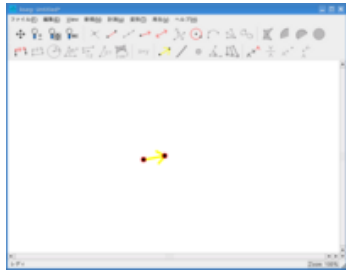


図 51 矢印の先端を選択

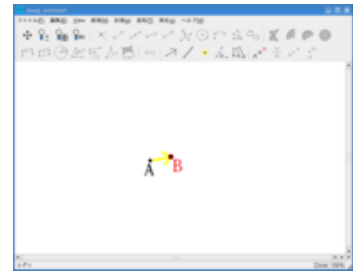


図 52 「変形」→「変換」を3回繰り返す

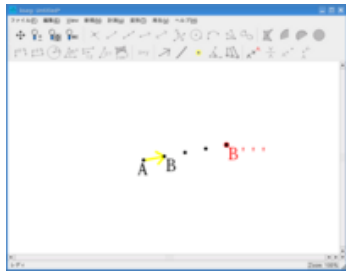


図 53 点 A を中心として、図のように円を描く

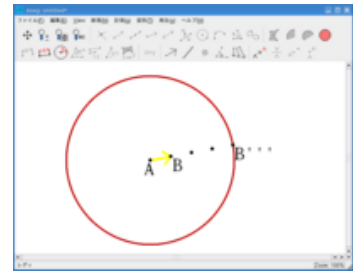


図 54 円上に駆動点 C をとる

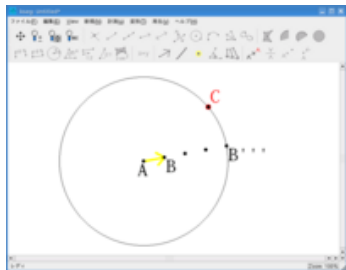


図 55 B''' , A, C の順に選択、「変形」→「角度を選択」

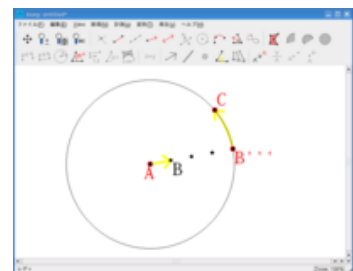


図 56 円の中心 A を選択して、「変形」→「中心を選択」

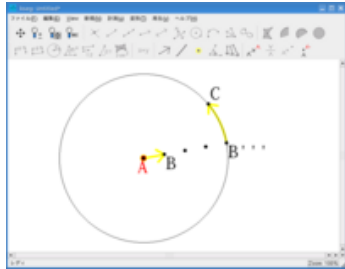


図 57 点 D を選択して、「変形」→「回転」

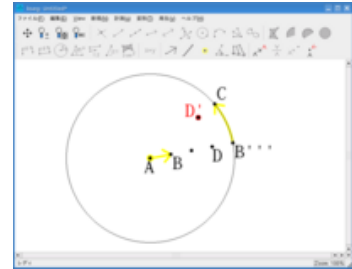


図 58 図のように小円を描く

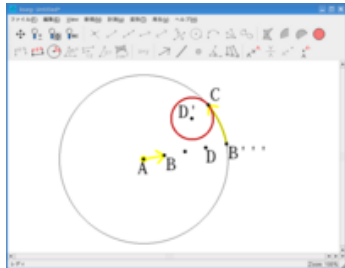


図 59 C, A, B''' の順に選択、「変形」→「角度を選択」

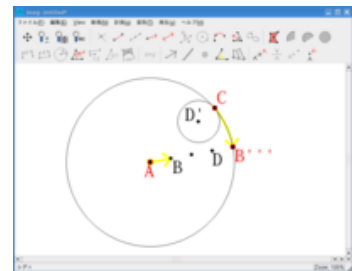


図 60 点 D を選択後、「変形」→「中心を選択」、 C を選択して、「変形」→「回転」を 4 回

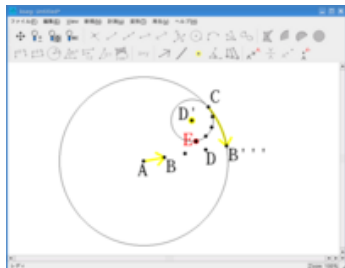
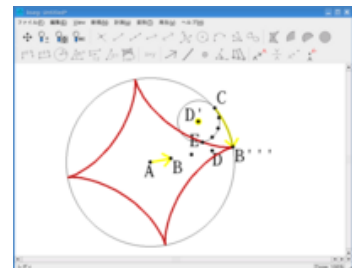


図 61 点 C (駆動点) と点 E (描画点) を選択して、「新規」→「軌跡」



5.1 xy 平面におけるアステロイド

円と、その内部を回転する円の半径の比が 4 : 1 のときアステロイドとなります。このとき、回転する円上の点の角度には図のような性質があります。

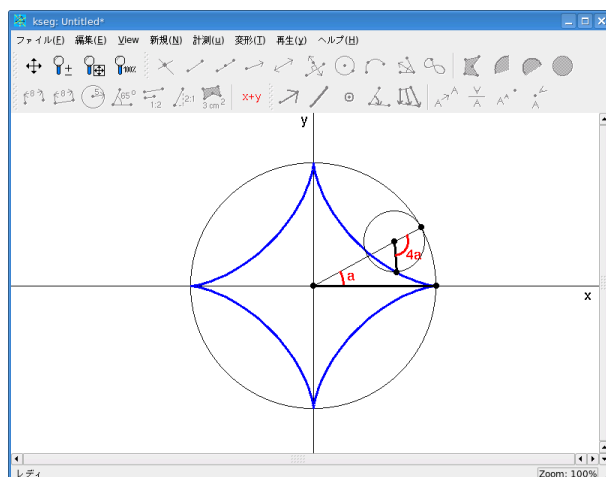


図 62 アステロイド

また、図のような xy 平面で考え、大きな円の半径を r 、回転角を a とすると、この軌跡は以下の式によってあらわされます。

$$\begin{cases} x = r \cos^3 a \\ y = r \sin^3 a \end{cases}$$

円と、その内部を回転する円の半径の比が 3 : 1 のとき、転がる円上の点の軌跡はデルトイドと呼ばれます。それでは、アステロイドの場合を参考にして、デルトイドを描いてみてください。